

Sommaire

Préface	1
Introduction	5
I Matrices et Opérations Matricielles : Notions de Base	9
<i>I.1 Note historique</i>	9
<i>I.2 Matrice : définition</i>	10
<i>I.3 Opérations sur les matrices</i>	11
I.3.1 Transposition	11
I.3.2 Addition (somme) de matrices	11
I.3.3 Multiplication d'une matrice par un scalaire	12
I.3.4 Soustraction de matrices	13
I.3.5 Produit de Hadamard de deux matrices	13
I.3.5.1 Division de Hadamar	13
I.3.6 Produit standard de deux matrices	14
I.3.6.1 Quelques propriétés du produit standard	15
I.3.7 Produit exotique : Kronecker	16
I.3.7.1 Quelques propriétés du produit de Kronecker	16
<i>I.4 Matrices spéciales</i>	17
I.4.1 Matrices carrées et rectangulaires	17
I.4.2 Matrice symétrique	18
I.4.3 Matrice diagonale	19
I.4.4 Multiplication par une matrice diagonale	19
I.4.5 Matrice bande-diagonale	20
I.4.6 Matrice unité	20
I.4.7 Delta de Kronecker ou de Dirac	21
I.4.8 Matrice toute pleine de uns	21
I.4.8.1 Une jolie propriété	22
I.4.9 Matrice toute pleine de zéros	22
I.4.10 Matrice de permutation	23
I.4.11 Matrice triangulaire	24
I.4.12 Matrice de produits croisés	24
I.4.12.1 Matrice de variance/covariance	25

II	Vecteurs et Espaces Vectoriels : Notions de Base	27
II.1	<i>Note historique</i>	27
II.2	<i>Vecteurs : définition</i>	27
II.3	<i>Opérations sur les vecteurs</i>	28
II.3.1	Addition de deux vecteurs	28
II.3.2	Produit d'un vecteur et d'un nombre scalaire	29
II.3.3	Produit d'un vecteur et d'une matrice	30
II.3.4	Produit scalaire de 2 vecteurs	31
II.3.5	Produit externe de deux vecteurs	32
II.3.6	Flip (et pas flop ?)...	33
II.3.6.1	Matrice anti-diagonale et flip	33
II.3.7	L'opérateur vec	34
II.3.7.1	Kron et Vec	35
II.3.7.2	Matrice de commutation, kron et vec	37
II.4	<i>Espaces vectoriels</i>	38
II.4.1	Norme(s) d'un vecteur	38
II.4.1.1	Variance, inertie, et écart-type	39
II.4.1.2	Normes de Minkowski	40
II.4.1.3	Norme euclidienne généralisée	41
II.4.1.4	Produit scalaire généralisé	42
II.4.1.5	Inégalité de Schwarz	43
II.4.1.6	Normalisation d'un vecteur	44
II.4.1.7	Une variante de la normalisation : Les notes Z	45
II.4.2	Cosinus de deux vecteurs	45
II.4.2.1	Cosinus généralisé	46
II.4.2.2	Cosinus et orthogonalité	46
II.4.2.3	Coefficient de corrélation	47
II.4.2.4	Matrice orthogonale	48
II.4.3	Projection d'un vecteur sur un autre vecteur	49
II.4.4	Distance entre vecteurs	50
II.4.4.1	Distance euclidienne et cosinus	52
II.4.4.2	Distance euclidienne généralisée	52
II.4.4.3	Distances de Minkowski	52
II.5	<i>Combinaison et indépendance linéaires</i>	54
II.5.1	Rang d'une matrice	56
III	Matrices et Vecteurs : Quelques Applications	57
III.1	<i>Processus cognitifs, réseaux de neurones et matrices</i>	57
III.1.1	Comment faire apprendre des visages à un réseau de neurones ?	58
III.1.1.1	Mémoire autoassociative	58
III.1.1.2	Mémoire associative avec apprentissage heb- bien	61

III.1.1.3	Mémoire autoassociative avec apprentissage de Widrow-Hoff	66
III.1.2	Le nom du visage : hétéroassociateurs linéaires . . .	71
III.2	<i>Analyse des données, statistiques et matrices</i>	77
III.2.1	Matrice de corrélation	77
III.2.2	Matrice de distance entre lignes d'une matrice de données	81
IV	Inverse, Pseudo-Inverse, Vecteur et Valeur Propres	87
IV.1	<i>Note historique</i>	87
IV.2	<i>Inverse d'une matrice carrée</i>	88
IV.2.1	Inverse d'une matrice diagonale	89
IV.2.2	Inverse de matrices orthonormales et orthogonales .	89
IV.2.3	Matrice idempotente	91
IV.3	<i>Inverse généralisée ou pseudo-inverse</i>	91
IV.4	<i>Vecteurs et valeurs propres</i>	92
IV.4.1	Définition	93
IV.4.2	Exemple	93
IV.4.3	Normalisation	94
IV.4.4	Trace et valeurs propres	95
IV.4.5	Vecteurs et Valeurs Propres d'une matrice semi-définie positive	96
IV.4.5.1	Semi-définie positive ou négative : définition	96
IV.4.5.2	Définie positive ou négative : définition . . .	97
IV.4.5.3	Propriétés des matrices semi-définies posi- tives	97
IV.4.5.4	Exemple de diagonalisation d'une matrice semi-définie positive	99
IV.5	<i>Fonctions d'une matrice</i>	99
IV.6	<i>Déterminant d'une matrice</i>	102
IV.6.1	Déterminant : approche classique	102
IV.6.1.1	Préliminaire : permutation et sa signature .	102
IV.6.1.2	Déterminant : approche classique, le retour	103
IV.6.1.3	Déterminant : Matrice 2×2	104
IV.6.1.4	Déterminant : Matrice 3×3	104
IV.6.1.5	Déterminant : Matrice 4×4	105
IV.6.2	Quelques propriétés importantes du déterminant . .	106
IV.6.2.1	Déterminant et système d'équations linéaires	106
IV.6.2.2	Déterminant et rang d'une matrice	106
IV.7	<i>Déterminant, vecteurs et valeurs propres</i>	107
IV.7.1	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice 2×2 : cas général	107
IV.7.2	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice 2×2 : Exemple	109

IV.7.3	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice 3×3 : cas général	110
IV.7.4	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice 3×3 : Exemple	112
IV.7.5	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice 4×4 : cas général	114
IV.8	<i>Géométrie des vecteurs et valeurs propres</i>	114
IV.8.1	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice positive définie	114
IV.8.2	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice quelconque	116
IV.9	<i>La méthode de la puissance itérée</i>	117
IV.9.1	Puissance itérée : exemple	118
IV.9.2	Explication de la puissance itérée	124
IV.10	<i>Décomposition en valeurs singulières</i>	125
IV.10.1	Définition	125
IV.10.2	Un exemple	126
IV.10.3	Note technique : Accorder les signes	127
IV.10.4	Décomposition en valeurs singulières généralisées .	129
IV.11	<i>Retour à la pseudo-inverse</i>	130
V	Vecteur et Valeur Propres : Applications 1	131
V.1	<i>Réseaux de neurones, vecteurs et valeurs propres</i>	132
V.1.1	Des noms pour les visages ou le retour de la mémoire hétéroassociative	132
V.1.2	Une solution optimale pour stocker des visages . . .	134
V.2	<i>Régression linéaire</i>	140
V.3	<i>Analyse en Composantes Principales</i>	141
V.3.1	ACP : un exemple dans le domaine du vin	143
V.3.2	Décomposition en valeurs singulières généralisées et analyse des correspondances	147
V.3.3	La ponctuation de quelques grands auteurs	148
V.4	<i>Analyse discriminante</i>	154
V.4.1	Analyse discriminante : idée de base	154
V.4.2	Digression : analyse de la variance	155
V.4.3	Retour à l'analyse discriminante	158
V.4.4	Petit exemple : tous les garçons et les filles	161
V.4.5	SPECT et golfe : imagerie cérébrale	163
V.5	<i>L'analyse du triple : analyser une matrice de distance</i>	168
V.5.1	Analyse du Triple (MDS) : un exemple	170
V.6	<i>Distances et analyse des données</i>	174
V.6.1	Rappel, notations,	175
V.6.2	Distance du chi-deux et analyse des correspondances	175
V.6.3	Distance de Mahalanobis et analyse discriminante .	178

V.6.4	Comment retrouver les projections des observations : éléments supplémentaires	179
V.6.5	Procruste : Projection d'une matrice de distance sur une autre	180
VI	Vecteur et Valeur Propres : Applications 2	185
VI.1	<i>SVD et traitement de l'image</i>	185
VI.1.1	Transformations unitaires	187
VI.1.2	Visages et SVD	188
VI.1.3	Images et ACP	189
VI.1.3.1	Etape 1 : Numériser et vectoriser les images	189
VI.1.3.2	Etape 2 : Calculer la matrice de produits croisés	193
VI.1.3.3	Etape 3 : Diagonaliser la matrice de produits croisés	193
VI.1.3.4	Etape 4 : Calcul des projections des images	194
VI.1.3.5	Etape 5 : Reconstruction des images initiales	194
VI.1.3.6	Images supplémentaires	196
VI.1.4	Décomposition en valeurs singulières	197
VI.1.4.1	ACP et mémoire autoassociative	199
VI.2	<i>Vers un modèle pour la reconnaissance des visages</i>	199
VI.2.1	Première approche : numérisation	199
VI.2.1.1	Intensités lumineuses et vecteurs propres	200
VI.2.1.2	Comment mettre en œuvre une tâche de reconnaissance ?	206
VI.2.1.3	Intensités lumineuses et convexité	207
VI.2.2	Deuxième approche : normalisation	207
VI.2.2.1	Normalisation et vecteurs propres	209
VI.2.3	Troisième approche : scanners à rayons lasers	210
VI.2.3.1	Vecteurs propres et rayons lasers	213
VII	Dérivées Matricielles	215
VII.1	<i>Note historique</i>	215
VII.2	<i>Quelques rappels</i>	216
VII.2.1	Fonctions	216
VII.2.2	Opérations sur les fonctions	216
VII.2.3	Limites d'une fonction	217
VII.3	<i>Dérivées de fonctions simples</i>	218
VII.3.1	Dérivées	218
VII.3.2	Règles de dérivation	221
VII.3.3	Exemple de fonctions simples et de leurs dérivées : sinus, cosinus	222
VII.4	<i>Dérivation de fonctions composées</i>	223
VII.4.1	Produits matriciels : dérivation symbolique	224
VII.5	<i>Règles de dérivation : Exemples</i>	225

VII.5.1	Régression : le retour	225
VII.5.1.1	Régression avec un point d'intersection	228
VII.5.2	Réseaux de neurones et dérivées	229
VII.5.2.1	Règle de Widrow-Hoff pour un perceptron	229
VII.5.2.2	Un exemple d'ADALINE : craquant, croquant et croustillant	232
VII.5.2.3	Règle de Widrow-Hoff pour une ADALINE logistique	237
VIII	Produit de Luxe : La Convolution	241
VIII.1	<i>Note historique</i>	241
VIII.2	<i>Convolution vectorielle</i>	242
VIII.2.1	Convolution de deux vecteurs : définition	242
VIII.2.1.1	Un exemple avec la formule de convolution	243
VIII.2.1.2	Comment rendre la convolution concrète : boîtes et fenêtres	245
VIII.2.1.3	Convolution tronquée	252
VIII.2.1.4	Matrice de convolution	254
VIII.2.2	Déconvolution de deux vecteurs	255
VIII.2.3	Quelques propriétés de la convolution	256
VIII.2.3.1	La convolution est un produit	256
VIII.2.3.2	Convolution et produit externe	257
VIII.2.3.3	Convolution et multiplication de polynômes	259
VIII.2.4	Corrélation de deux vecteurs : définition	260
VIII.2.4.1	Un exemple avec la formule de corrélation	261
VIII.2.4.2	Corrélation avec des boîtes et des fenêtres	263
VIII.2.4.3	Matrice de calcul de corrélation	266
VIII.2.4.4	Corrélation tronquée	268
VIII.2.5	Quelques Propriétés de la corrélation	268
VIII.2.5.1	Corrélation et produit externe	268
VIII.2.5.2	Corrélation et coefficient de corrélation	269
VIII.2.6	Corrélation et convolution	271
VIII.2.7	Quelques applications de la convolution vectorielle	271
VIII.2.7.1	Convolution et filtre	271
VIII.2.7.2	Mélanges de formes : convolution de deux fonctions	274
VIII.2.7.3	Mémoire et convolution : TODAM	276
VIII.3	<i>Convolution matricielle</i>	281
VIII.3.1	Convolution de deux matrices : Définition	281
VIII.3.1.1	Un exemple avec la formule de convolution	282
VIII.3.1.2	Comment rendre la convolution concrète : boîtes et fenêtres	284
VIII.3.1.3	Convolution tronquée	288
VIII.3.2	Corrélation de deux matrices	289
VIII.3.3	Un commentaire sur les notations	289

VIII.3.4	Quelques applications : convolution, filtres et système visuel	290
VIII.3.4.1	Les hautes et les basses fréquences	290
VIII.3.4.2	Traitement de l'information visuelle : le sombréro	296
VIII.4	<i>La transformée discrète de Fourier</i>	296
VIII.4.1	Présentation générale des transformées de Fourier	296
VIII.4.2	Transformée de Fourier discrète	298
VIII.4.3	Transformation inverse de Fourier	299
VIII.4.4	Présentation matricielle	300
VIII.4.5	Fourier et convolution	301
VIII.4.6	Fourier et images	302
VIII.4.7	Phase, magnitude, etc.	304
VIII.4.8	Sinus et cosinus	304
IX	Pour en Savoir Plus	305
X	Glossaire	307
A	Brève Introduction à MATLAB	319
A.1	<i>Prise en main</i>	319
A.1.1	Fonctionnement	319
A.1.1.1	Mode interactif	320
A.1.1.2	Mode exécutif	321
A.2	<i>Notions de base</i>	322
A.2.1	Génération de matrices et de vecteurs	322
A.2.2	sélection et concaténation de matrices	324
A.3	<i>Opérations avec MATLAB</i>	325
A.3.1	Opérations arithmétiques	325
A.3.2	Opérations matricielles	325
A.4	<i>Fonctions matricielles</i>	326
A.5	<i>Opérateurs logiques et boucles de contrôle</i>	327
A.5.1	Opérateurs logiques et de relation	327
A.5.2	Boucles de contrôle	328
A.5.3	Boucles for	328
A.5.4	Boucles while	328
A.5.5	test logique IF	329
A.6	<i>Figures et graphiques</i>	330
A.7	<i>Pour en savoir plus</i>	331
	Bibliographie	332
	Index	341
	Sommaire	350